ثانوية الليمون - بركان

ملخص دراسة الدوال

1 - الاشتقاق ورتابة دالة

مبرهنة

لتكن f قابلة للاشتقاق على مجال I
تكون f تزايدية (قطعا) على I إذا وفقط اذا كانت الدالة المشتقة f' موجبة (قطعا) على المجال I
تكون f تناقصية (قطعا) على I اذا وفقط إذا كانت الدالة المشتقة f' سالبة (قطعا) على المجال I
تكون f ثابتة على I إذا كانت الدالة المشتقة f' منعدمة على المجال

2- قابلية الاشتقاق و المطراف

مبرهنة

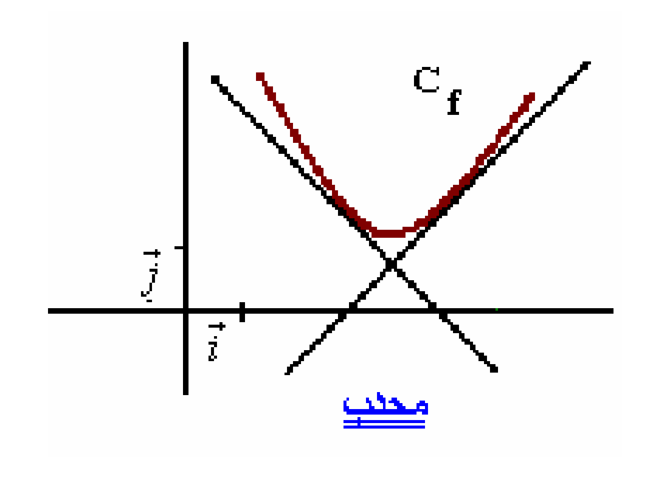
لتكن f دالة معرفة على مجال فتوح I و $x_0 \in I$
اذا كانت f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 و تقبل مطرافا في النقطة x_0 فان $f'(x_0)=0$

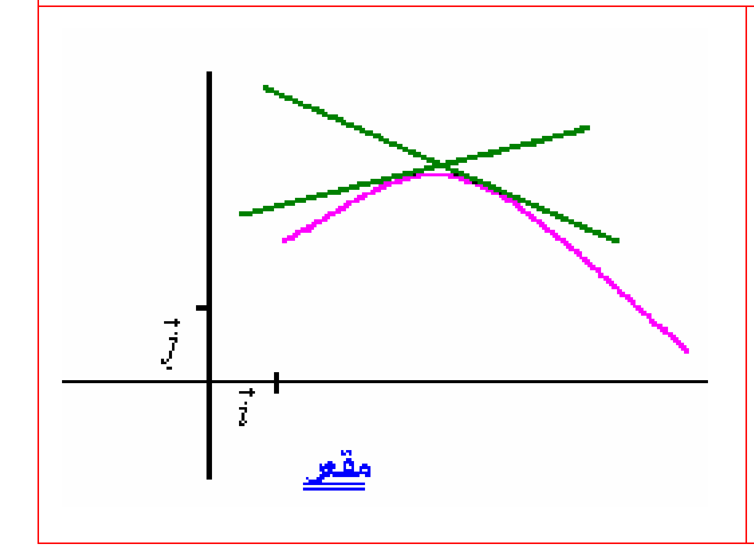
ملاحظة: المبرهنة لا تقبل المبرهنة العكسية (مثال مضاد $f(x)=x^3$; $x_0=0$)

1- تقعر منحنى دالة -- نقطة انعطاف

1-1 تعريف

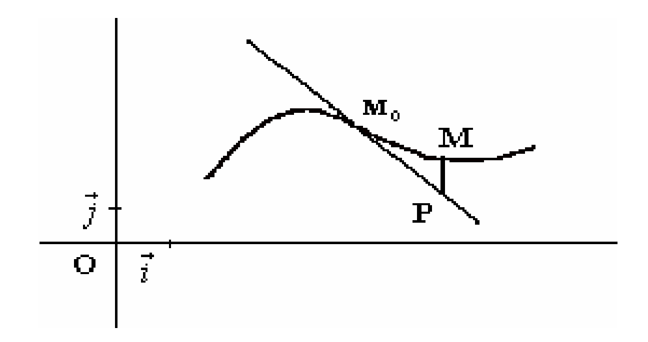
لتكن f قابلة للاشتقاق على مجال I
نقول إن المنحنى (C_f) محدب إذا كان يوجد فوق جميع مماساته
نقول إن المنحنى (C_f) مقعر إذا كان يوجد تحت جميع مماساته





2-1 تعريف

لتكن f قابلة للاشتقاق على مجال I و (T) مماسا للمنحنى (C_f) في النقطة $M_0(x_0;f(x_0))$.
لتكن M و P نقطتين لهما نفس الافصول وينتميان على التوالي إلى (C_f) و (T) إذا انعدم $\overline{PM}$ في x_0
و تغيرت إشارته في مجال مفتوح مركزه x_0 فان النقطة M_0 نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)



3-1 خـــاصيات

f دالة قابلة الاشتـــــقاق مرتين على مجال I

* إذا كانت f'' موجبة علىI فان (C_f) يكون محدبا على I

* إذا كانت f'' سالبة علىI فان (C_f) يكون مقعرا على I

* اذا كانت f'' تنعدم في x_0 من الــمجال I وكان يـوجد $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ بحيث إشارة f'' على $[x_0, x_0+\alpha[$ مخالفة لإشارة f'' علىا $]x_0-\alpha, x_0]$ فان $M_0(x_0; f(x_0))$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

ملاحظـــــة قد لا تكون الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين ويكون مع ذلك لمبيانها نقطة انعطاف

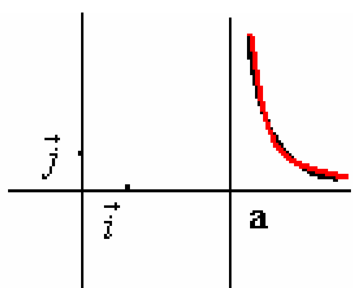
- الفروع اللانهـــائية

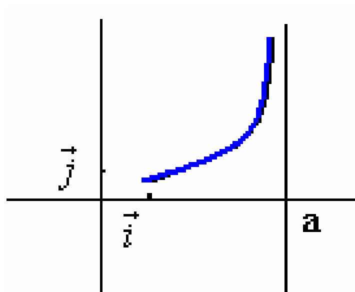
1-2 تعريف

إذا آلت إحدى إحداثـــيتي نقطة من C منحنى دالة إلى اللانهاية فإننا نقول إن C يقبل فرعا لانهائيا.

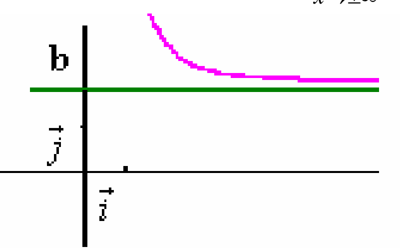
2-2 مستقيم مقارب لمنحنى

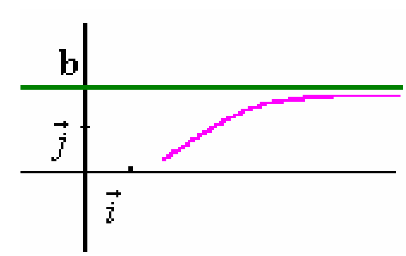
* اذا كان $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ فان المستقيم الذي معادلته $x = a$ مقارب ل C_f





* اذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ فان المستقيم ذا المعادلة y =b مقارب ل C_f.





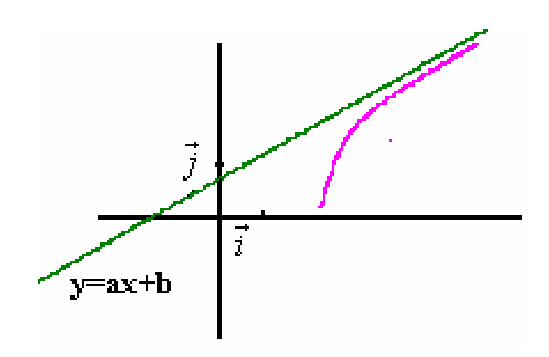
** يكون المستقيم الذي معادلته y =ax + b مقارب للمنحنى C_f إذا وفقط إذا كان

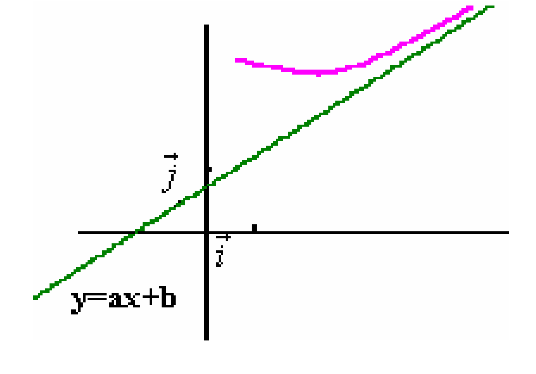
$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$$

خا صية

يكون المستقيم ذو المعادلة y = ax + b مقارب لمنحنى C_f إذا وفقط إذا كان

$$\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b\right) \text{ أو } \left(\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - ax) = b\right)$$





ملاحظة دراسة إشارة (f (x) – (ax + b)) تمكننا من معرفة وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمقارب المائل.

2-3- الاتجاهات المقاربة

تعاريف

أ – إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\pm\infty$ نقول إن (C_f) يقبل محور الأراتيب كاتجاه مقارب.

ب - إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ نقول إن (C_f) يقبل محور الافاصيل كاتجاه مقارب.

ج - إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-ax=\pm\infty$ نقول إن (C_f) يقبل المستقيم ذا المعادلة y= ax كاتجاه مقارب

بصفة عامة

إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ نقول إن (C_f) يقبل المستقيم ذا المعادلة y= ax كاتجاه مقارب.

3 - مركز تماثل – محور تماثل

3-1 خاصة

في معلم متعامد , يكون المستقيم الذي معادلته x = a محور تماثل لمنحنى دالة f إذا وفقط إذا كان
$\forall x\in D_f \quad (2a-x)\in D_f \quad ; \quad f(2a-x)=f(x)$

3-2 خاصة

في معلم ما,تكون النقطة E (a ;b) مركز تماثل لدالة f إذا وفقط إذا كان
$\forall x\in D_f \quad (2a-x)\in D_f \quad ; \quad f(2a-x)=2b-f(x)$

4- الدالة الدورية

4-1 تعريف

نقول أن f دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي T موجب قطعا بحيث
$\forall x\in D_f \quad x+T\in D_f \; ; \quad x-T\in D_f \quad f(x+T)=f(x)$
العدد T يسمى دور الدالة f. اصغر دور موجب قطعا يسمى دور الدالةf

4- 2 خاصة

إذا كانت للدالة f دور T فان $f(x+nT)=f(x) \qquad \forall x\in D_f,\forall n\in\mathbb{Z}$

4-3 خاصة

إذا كانت f دالة دورية و T دورا لها فان منحنى الـدالـة f على $D_f\cap[x_0+nT;x_0+(n+1)T[$ هـو صورة منحنى الدالة على $D_f\cap[x_0,x_0+T[$ بواسطة الإزاحة ذات المتجهة $nT\cdot\vec{i}$ حيث n عدد صحيح نسـبي.

4-4 خاصة

f دالة دورية و T دورا لها نعتبر $I_0=D_f\cap[x_0,x_0+T[$ و $I_n=D_f\cap[x_0+nT;x_0+(n+1)T[$
f لها نفس منحى التغييرات على المجموعتين I_0 و I_n لكل n من $\mathbb{Z}$

أمثلة

دالة $x\to\cos x$ دورية ودورها 2π إذن يكفي دراستها على $]-\pi;\pi]$

و حيث أن $x\to\cos x$ زوجية فنقتصر دراستها على

نهايات المتتاليات

A- تذكير

انشطة تذكيرية

نشاط1: نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بـ

$$\begin{cases} u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1} - u_n$$

1- بين أن (v_n) متتالية ثابتة .

2- استنتج أن (u_n) متتالية حسابية و حدد عناصرها المميزة

3- أحسب $S'_n = \sum_{i=1}^{i=n} u_i$ بدلالة n.

نشاط2 : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$$

1- أحسب $u_2 \; ; \; u_3$

2- بين أن $(u_n)_{n\geq 1}$ مكبورة بالعدد 3

3- أدرس رتابة $(u_n)_{n\geq 1}$ و استنتج أن $(u_n)_{n\geq 1}$ مصغورة بالعدد 2

4- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ $v_n = u_n - 3$

أ- بين أن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية و أحسب v_n بدلالة n .

ب- أحسب $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} u_i$ بدلالة n

1-المتتالية: المكبورة –المصغورة –المحدودة

* تكون المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ مكبورة اذا وفقط اذا وجد عدد حقيقي M بحيث $\forall n \geq n_0 \quad u_n \leq M$
* تكون المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ مصغورة اذا وفقط اذا وجد عدد حقيقي m بحيث $\forall n \geq n_0 \quad u_n \geq m$
* تكون المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ محدودة اذا وفقط اذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ مكبورة و مصغورة

2- المتتالية الرتيبة

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية

$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية تزايدية $\Leftrightarrow \quad u_{n+1} \geq u_n \quad \forall n \geq n_0$

$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية تزايدية قطعا $\Leftrightarrow \quad u_{n+1} \succ u_n \quad \forall n \geq n_0$

$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية تناقصية $\Leftrightarrow \quad u_{n+1} \leq u_n \quad \forall n \geq n_0$

$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية تناقصية قطعا $\Leftrightarrow \quad u_{n+1} \prec u_n \quad \forall n \geq n_0$

$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية ثابتة $\Leftrightarrow \quad u_{n+1} = u_n \quad \forall n \geq n_0$

I- المتتالية الحسابية

1- تعريف

تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ حسابية اذا كان يوجد عدد حقيقي r بحيث $\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = u_n + r$

العدد r يسمى أساس المتتالية .

2- صيغة الحد العام - مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية

خاصة

اذا كان $(u_n)_{n\geq p}$ متتالية حسابية أساسها r فان

$$\forall n \geq p \quad u_n = u_p + (n-p)r$$

ملاحظة - اذا كان $(u_n)_{n\geq p}$ متتالية حسابية أساسها r فان $u_n = u_q + (n-q)r \quad \forall n \geq q \geq p$

خاصة

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية

اذا كان $S_n = u_p + u_{p+1} .... + u_{n-1}$ فان

$$S_n = \frac{(n-p)(u_p + u_{n-1})}{2}$$

$n-p$ هو عدد حدود المجموع S_n و u_p هو الحد الأول للمجموع S_n و u_{n-1} هو الحد الأخيرللمجموع S_n

$$S_n = \frac{(\text{عدد حدود } S_n)}{2}\left(\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول لـ } S_n\right)$$

II- المتتالية الهندسية

1- تعريف

تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ هندسية اذا كان يوجد عدد حقيقي q بحيث $\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = qu_n$

العدد q يسمى أساس المتتالية .

2- صيغة الحد العام - مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية

خاصة

اذا كان $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q فان

$$\forall n \geq n_0 \quad u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$$

ملاحظة - اذا كان $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q فان $u_n = u_p q^{n-p} \quad \forall n \geq p \geq n_0$

خاصة

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q يخالف 1

اذا كان $S_n = u_p + u_{p+1} .... + u_{n-1}$ فان

$$S_n = u_p\left(\frac{1-q^{n-p}}{1-q}\right)$$

$n-p$ هو عدد حدود المجموع S_n و u_p هو الحد الأول للمجموع S_n

ملاحظة إذا كان (u_n) متتالية هندسية أساسها q يخالف 1 فان S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_0 + u_1 .... + u_{n-1} = u_0\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

حالة خاصة إذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها 1 فان $S_n = u_p + u_{p+1} .... + u_{n-1} = u_p(n-p)$

B – نهايات المتتاليات

I- نهاية متتالية

نعرف نهاية متتالية كما عرفنا نهاية دالة عند $+\infty$

نكتب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ باختصار $\lim u_n$

نشاط نعتبر المتتاليتين (u_n) و $(v_n)_{n\geq1}$ حيث $u_n = n^2$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $v_n = \frac{1}{n}+3$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

نحدد $\lim u_n$ و $\lim v_n$

نعلم أن $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ إذن $\lim u_n = +\infty$ نعلم أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}+3=3$ إذن $\lim v_n = 3$

1- تعريف نهاية منتهية لمتتالية

نقول ان نهاية $(u_n)_{n\geq n_0}$ تؤول إلى l إذا و فقط إذا كان كل مجال مفتوح مركزه l يحتوي على جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ابتداء من رتبة. نكتب $\lim u_n = l$

2- تعريف نهاية لا منتهية لمتتالية

*نقول ان نهاية $(u_n)_{n\geq n_0}$ تؤول إلى $+\infty$ إذا و فقط إذا كان كل مجال على شكل $]A;+\infty[$ يحتوي علىجميع حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ابتداء من رتبة. نكتب $\lim u_n = +\infty$

*نقول ان نهاية $(u_n)_{n\geq n_0}$ تؤول إلى $-\infty$ إذا و فقط إذا كان كل مجال على شكل $]-\infty;A[$ يحتوي علىجميع حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ابتداء من رتبة. نكتب $\lim u_n = -\infty$

ملاحظة $\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim -u_n = +\infty$

3- نهايات متتالية مرجعية

خاصية

ليكن p عدد صحيح طبيعي $p\geq1$ و k عدد حقيقي

$\lim \sqrt{n} = +\infty$ $\lim n^p = +\infty$ $\lim \frac{k}{\sqrt{n}} = 0$ $\lim \frac{1}{n^p} = 0$

4 خاصية

لتكن متتالية عددية $(u_n)_{n\geq n_0}$ و l عددا حقيقيا

$$\lim (u_n - l) = 0 \Leftrightarrow \lim u_n = l$$

$$\lim |u_n - l| = 0 \Leftrightarrow \lim u_n = l$$

5- متتالية متقاربة – متتالية متباعدة

تعريف

نقول إن متتالية متقاربة إذا و فقط كانت نهايتها منتهية.
نقول إن متتالية متباعدة إذا وفقط كانت غير متقاربة.

أمثلة

نعتبر $u_n = \frac{-3}{n^2}+4$ و $v_n = n^3$ و $w_n = (-1)^n$

(u_n) متقاربة لان $\lim u_n = 4$

(v_n) متباعدة لان $\lim v_n = +\infty$

(w_n) متباعدة لأن (w_n) لا تقبل نهاية

II- مصادق التقارب

مصداق1 لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية و $(v_n)_{n\geq n_0}$، متتالية عددية متقاربة لأعداد حقيقية موجبة l عدد حقيقي حيث $|u_n - l| \leq v_n$ $\forall n\geq N$ $\exists N\in\mathbb{N}$.

اذا كان $\lim v_n = 0$ فان $(u_n)_{n\geq n_0}$ متقاربة و $\lim u_n = l$

مصداق2 لتكن $(u_n)_{n\ge n_0}$ و $(v_n)_{n\ge n_0}$ متتاليتين عدديتين حيث $u_n \le v_n \quad \forall n\ge N \quad \exists N\in\mathbb{N}$

اذا كان $\lim u_n = +\infty$ فان $\lim v_n = +\infty$

اذا كان $\lim v_n = -\infty$ فان $\lim u_n = -\infty$

لازمة

لتكن $(u_n)_{n\ge n_0}$ و $(v_n)_{n\ge n_0}$ و $(w_n)_{n\ge n_0}$ ثلاث متتاليات حيث $v_n \le u_n \le w_n \quad \forall n\ge N \quad \exists N\in\mathbb{N}$

اذا كان $\lim v_n = \lim w_n = l$ فان $\lim u_n = l$

أمثلة نعتبر $(u_n)_{n\ge1}$ حدد $\lim u_n$ في الحالات التالية:

أ- $u_n = n^2+n-3$ ب- $u_n = -n^2+n$ ج- $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$

أ- لدينا لكل $n\ge 3$ $n^2 \le n^2+n-3$ و حيث $\lim n^2 = +\infty$ ومنه $\lim u_n = +\infty$

ب- لدينا لكل $n\ge 2$ $1-\dfrac{n}{2}\le 0$ ومنه $1-n \le -\dfrac{n}{2}$ و بالتالي $n-n^2 \le -\dfrac{n^2}{2}$

وحيث $\lim -\dfrac{n^2}{2} = -\infty$ فان $\lim u_n = -\infty$

ج- لدينا لكل $n\ge1$ $\left|\dfrac{\sin n}{n}\right| \le \dfrac{1}{n}$ و حيث $\lim \dfrac{1}{n} = 0$ فان $\lim u_n = 0$

تمرين: نعتبر $(u_n)_{n\ge1}$ حيث $u_n = 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+......+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

بين بالترجع أن $u_n \ge \sqrt{n}$ و استنتج $\lim u_n$

III- نهاية المتتالية الهندسية q^n

الحالة1: $q \succ 1$

يوجد عدد حقيقي موجب قطعا a حيث $q = 1+a$ نعلم أن $(1+a)^n \ge 1+na$ ومنه $q^n \ge 1+na$

وحيث $\lim 1+na = +\infty$ فان $\lim q^n = +\infty$

الحالة2 $q=1$ لدينا $\lim q^n = 1$

الحالة3 $-1\prec q\prec 1$

$|q|\prec 1$ ومنه $\dfrac{1}{|q|}\succ 1$ و منه $\lim\left(\dfrac{1}{|q|}\right)^n = +\infty$ و بالتالي $\lim \dfrac{1}{|q|^n} = \lim\left(\dfrac{1}{|q|}\right)^n$ و بالتالي $\lim |q^n| = 0$

إذن $\lim q^n = 0$

الحالة4 $q\le -1$ (q^n) ليست لها نهاية

خاصية

اذا كان $q\succ 1$ فان $\lim q^n = +\infty$	اذا كان $-1\prec q\prec 1$ فان $\lim q^n = 0$
اذا كان $q=1$ فان $\lim q^n = 1$	اذا كان $q\le -1$ فان (q^n) ليست لها نهاية

ملاحظة *- المتتالية (q^n) متقاربة اذا كان $-1\prec q\le 1$

*- ليكن $r\in\mathbb{Q}^*$

إذا كان $r\succ 0$ فان $\lim\limits_{+\infty} n^r = +\infty$ إذا كان $r\prec 0$ فان $\lim\limits_{+\infty} n^r = 0$

أمثلة حدد $\lim\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n$ و $\lim \dfrac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$

تمرين نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة ب:

$$u_0=\frac{3}{2} \quad ; \quad (\forall n\in\mathbb{N}): u_{n+1}=\frac{u_n^2+u_n}{u_n^2+1}$$

1) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}): u_n \succ 1$

2) أدرس رتابة (u_n) و استنتج أن (u_n) متقاربة

3) أ – بين أن $0\prec u_{n+1}-1\leq\frac{1}{2}(u_n-1) \quad \forall n\in\mathbb{N}$

ب – استنتج : $(\forall n\in\mathbb{N}): 0\prec u_n-1\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ ثم أحسب $\lim u_n$

تمرين: نعتبر المتتالية (u_n) حيث $\begin{cases} u_0=10 \\ u_{n+1}=\frac{5u_n}{n+1}\end{cases}$

بين أن $0\leq\frac{u_{n+1}}{u_n}\prec\frac{1}{2} \quad \forall n\geq 10$ ثم حدد $\lim u_n$

IV- خاصيات

خاصية كل متتالية متقاربة و موجبة تكون نهايتها موجبة

خاصية إذا كان (u_n) و (v_n) متتاليتين متقاربتين نهايتها l و l' بحيث $u_n\leq v_n$ لكل $n\geq N$ فان $l\leq l'$

مبرهنة كل متتالية تزايدية و مكبورة هي متتالية متقاربة
كل متتالية تناقصية و مصغورة هي متتالية متقاربة

ملاحظة كل متتالية تزايدية و سالبة هي متتالية متقاربة
كل متتالية تناقصية و موجبة هي متتالية متقاربة

تمرين: نعتبر $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية معرفة بـ $u_n=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+.....+\frac{1}{n^2}$

1- بين أن $(u_n)_{n\geq1}$ تزايدية

2- بين أن $\frac{1}{k^2}\prec\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k} \quad \forall k\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ ثم بين أن $u_n\prec 2 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

3- استنتج أن $(u_n)_{n\geq1}$ متقاربة.

V- العمليات على نهايات المتتاليات المتقاربة

1- مبرهنة

(u_n) و (v_n) متتاليتين متقاربتين و α عدد حقيقي

$\lim(u_n+v_n)=\lim u_n+\lim v_n \qquad \lim(u_nv_n)=\lim u_n\times\lim v_n \qquad \lim(\alpha u_n)=\alpha\lim u_n$

إذا كان $\lim v_n\neq 0$ فان $\lim\frac{u_n}{v_n}=\frac{\lim u_n}{\lim v_n}$

العمليات على النهايات

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n+v_n)$	$\lim(u_n\times v_n)$	$\lim\frac{u_n}{v_n}$
l	l'	$l+l'$	$l\times l'$	$\frac{l}{l'} \quad (l'\neq0)$
$l \quad l\neq0$	$+\infty$	$+\infty$	∞ مع وضع إشارة l	0
$l \quad l\neq0$	$-\infty$	$-\infty$	∞ مع وضع عكس إشارة l	0
l حيث $l\neq0$	0^+	l	0	∞ مع وضع إشارة l
l حيث $l\neq0$	0^-	l	0	∞ مع وضع عكس إشارة l
0	0	0	0	شكل غير محدد
0	$+\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد	0
0	$-\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد	$-\infty$	شكل غير محدد
$+\infty$	l حيث $l\neq0$	$+\infty$	∞ مع وضع إشارة l	∞ مع وضع إشارة l
$-\infty$	l حيث $l\neq0$	$-\infty$	∞ مع وضع عكس إشارة l	∞ مع وضع عكس إشارة l

تمرين

حدد $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ ، $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2-3n+2}{n^2-1}$ ، $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{n^3+n-1}}{\sqrt[3]{n^2 2n-4}}$

VI- متتاليات من نوع $f(u_n)$

1- خاصية

إذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية متقاربة نهايتها l و f دالة متصلة في العدد الحقيقي l فان المتتالية $(v_n)_{n\geq n_0}$ المعرفة بـ $v_n=f(u_n)$ بحيث $n\geq n_0$ متقاربة و نهايتها $f(l)$

2- متتالية من نوع $u_{n+1}=f(u_n)$

نشاط

نعتبر (u_n) متتالية عددية حيث $\begin{cases}u_0=2\\ u_{n+1}=\frac{2u_n+3}{u_n}\end{cases}$

1- بين أن $2\leq u_n\leq\frac{7}{2}$ $\quad\forall n\in\mathbb{N}$

2- لتكن (v_n) متتالية عددية حيث $v_n=1-\frac{4}{u_n+1}$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية

ب- ب- حدد $\lim v_n$ استنتج $\lim u_n$

3- لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}_+^*$ حيث $f(x)=\frac{2x+3}{x}$

أ- تأكد أن f متصلة على $\left[2;\frac{7}{2}\right]$

ب- بين أن $f\left(\left[2;\frac{7}{2}\right]\right)\subset\left[2;\frac{7}{2}\right]$

ت- حل المعادلة $f(x)=x$

ماذا تلاحظ؟ ماذا تستنتج؟

خاصية

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية معرفة بالعلاقة $u_{n+1}=f(u_n)$ بحيث يوجد مجال I ضمن D_f و الحد الأول للمتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ينتمي إلى I و f متصلة على I و $f(I)\subset I$.

اذا كانت (u_n) متتالية متقاربة فان نهايتها l هي حل للمعادلة $f(x)=x$

تمرين

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ $\begin{cases}u_0=\frac{3}{2}\\ u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}\end{cases}$

1- بين أن $0\prec u_n\prec 2$ $\quad\forall n\in\mathbb{N}$.

2- بين أن (u_n) متتالية تزايدية و استنتج أن (u_n) متتالية متقاربة.

3- استنتج $\lim u_n$

تمرين

نعتبر (u_n) متالية حيث $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n(1-u_n)$ و $u_0=\frac{1}{2}$

بين أن (u_n) متقاربة و حدد نهايتها